# Pro gradu -tutkielma
# Beurlingin lause ja Volterra-operaattorin invariantit aliavaruudet

Aleksi Markkanen
Opiskelijanumero 013126382

28. tammikuuta 2016

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

| Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty | Laitos — Institution — Department |
|---|---|
| Matemaattis-luonnontieteellinen | Matematiikan ja tilastotieteen laitos |


Tekijä — Författare — Author

Aleksi Markkanen


Työn nimi — Arbetets titel — Title

Beurlingin lause ja Volterra-operaattorin invariantit aliavaruudet

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

| Työn laji — Arbetets art — Level | Aika — Datum — Month and year | Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages |
|---|---|---|
| Pro gradu -tutkielma | Tammikuu 2016 | 49 s. |


Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkimme invariantteja aliavaruuksia ja määritämme *Volterra-operaattorin* invariantit aliavaruudet. Olkoon $X$ Banachin avaruus, ja olkoon $T$ avaruuden $X$ rajoitettu lineaarikuvaus. Suljettu aliavaruus $M \subset X$ on kuvauksen $T$ *invariantti aliavaruus*, jos $TM \subset M$. Johdantoluvun 1 jälkeen luvussa 2 käsittelemme invariantteja aliavaruuksia yleisessä tilanteessa.

Invarianttien aliavaruuksien määrittäminen on vaikeata jopa yksinkertaisten operaattorien $T$ tapauksessa. Olkoon esimerkiksi jonoavaruuden $\ell^2$ siirto eteenpäin $U : \ell^2 \to \ell^2$ määritelty kaavalla $U(a_0, a_1, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$. $U$ on lineaarinen kuvaus avaruudelta itselleen, ja erityisesti avaruus $\ell^2$ on Hilbertin avaruus.

Kuvauksen $U$ invarianttien aliavaruuksien määrittäminen on kuitenkin haastavaa, ellei mahdotonta, tarkastelemalla tilannetta avaruudessa $\ell^2$. Tämän vuoksi käytämme isomorfismia, jolla siirrämme ongelman yksikkökiekon *Hardy-avaruuteen* $H^2$, joka koostuu analyyttisistä funktioista. Rakennamme isomorfismin ja esittelemme Hardy-avaruuden ominaisuuksia luvussa 3.

Luvussa 4 tutkimme eteenpäin siirtoa $U$ edellisessä luvussa rakentamamme isomorfismin kautta. Osoittautuu, että eteenpäin siirtoa vastaa avaruudessa $H^2$ multiplikaatio-operaattori. Todistamme Beurlingin lauseen, joka karakterisoi eteenpäin siirron kaikki invariantit aliavaruudet sisäfunktioiden avulla.

Luvussa 5 rakennamme isomorfismin, jolla voimme siirtää Beurlingin lauseen käyttöömme myös avaruuteen $L^2(0, \infty)$. Isomorfismi $J = J_1 J_2 : L^2(0, \infty) \to H^2$ koostuu kahdesta osasta. Kuvaus $J_2$ on käänteinen Fourier-muunnos rajoitettuna joukkoon $L^2(0, \infty)$ ja $J_1$ hyödyntää Möbius-kuvausta. Näin saamme kiekon $\mathbb{D}$ reunafunktioita, jotka voimme luvussa 3 esiteltyjä tuloksia hyväksikäyttämällä tulkita avaruuden $H^2$ funktioiksi.

Luvussa 6 todistamme Donald Sarasonin tuloksen *Volterra-operaattorin* invarianteista aliavaruuksista. Volterra-operaattori $V : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ määritellään kaavalla

$$Vf(x) := \int_0^x f(t)dt,$$

ja Sarasonin tuloksen mukaan sen invariantit aliavaruudet ovat täsmälleen muotoa $L^2(a, 1)$, jossa $0 \leq a \leq 1$. Siirrämme ongelman luvussa 5 rakentamallamme isomorfismilla avaruuteen $H^2$, jolloin voimme hyödyntää Beurlingin lausetta invarianttien aliavaruuksien karakterisoimiseen.



Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Funktionaalianalyysi, Funktioteoria, Invariantit aliavaruudet, Beurlingin lause

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

# Sisältö

# 1 Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkitaan invariantteja aliavaruuksia. Olkoon $X$ Banachin avaruus, ja olkoon $T$ avaruuden $X$ rajoitettu lineaarikuvaus: $T \in L(X)$. Sanotaan, että suljettu aliavaruus $M \subset X$ on kuvauksen $T$ *invariantti aliavaruus*, jos $TM \subset M$.

Sanotaan myös, että $x \in X$ on kuvauksen $T$ *syklinen vektori*, jos

$$\overline{\operatorname{span}}\,\{T^n x | n \geq 0\} = X.$$

Invarianttien avaruuksien ongelma kysyy, onko olemassa lineaarista kuvausta $T$ Hilbertin avaruudessa $X$, $T \in L(X)$, siten että kuvauksella $T$ ei ole epätriviaaleja invariantteja aliavaruuksia. Toisin sanoen, onko olemassa sellaista kuvausta $T \in L(X)$ siten että jokainen piste $x \in X \setminus \{\bar{0}\}$ on syklinen kuvaukselle $T$. Invarianttien aliavaruuksien määrittäminen on vaikeata jopa yksinkertaisten operaattorien $T$ tapauksessa.

Olkoon nyt jonoavaruuden $\ell^2$ siirto eteenpäin $U : \ell^2 \to \ell^2$ määritelty kaavalla $U(a_0, a_1, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$. $U$ on lineaarinen kuvaus avaruudelta itselleen, ja erityisesti avaruus $\ell^2$ on Hilbertin avaruus. Haluamme selvittää, mitkä aliavaruudet kuvaus $U$ pitää paikallaan eli mitkä ovat kuvauksen $U$ invariantit aliavaruudet.

Muutamia esimerkkejä invarianteista aliavaruuksista voidaan keksiä helposti. Esimerkiksi aliavaruudet $A_n := \{(a_0, a_1, \dots) : a_k = 0, \text{ kun } k \leq n\}$ kuvaus $U$ selvästi pitää paikallaan. Kysymykseen on kuitenkin haastavaa, ellei mahdotonta, vastata tarkastelemalla tilannetta avaruudessa $\ell^2$. Tämän vuoksi käytämme isomorfismia, jolla siirrämme ongelman yksikkökiekon *Hardy-avaruuteen* $H^2(\mathbb{D})$.

Avaruudessa $H^2(\mathbb{D})$ todistamme Beurlingin lauseen, joka karakterisoi eteenpäin siirron invariantit aliavaruudet. Luvussa 6 käytämme Beurlingin lausetta hyödyksemme, ja etsimme sen avulla *Volterra-operrattorin* $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$,

$$Vf(x) := \int_0^x f(t)dt,$$

invariantit aliavaruudet.

Ensimmäisten lukujen käsitteet ja tulokset ovat peräisin lähteestä [1] ellei muuten ole mainittu, ja luku 6 perustuu lähteeseen [3].

# 2 Invariantit aliavaruudet

Tässä luvussa esittelemme funktionaalianalyysistä notaatiota ja työkaluja, joita tulemme käyttämään ratkaistaessamme eteenpäin siirron $U : \ell^2 \to \ell^2$ invariantteja aliavaruuksia. Tästedes puhuessamme avaruudesta $X$ tarkoitamme Hilbertin avaruutta, jonka skalaarikunta on kompleksiluvut. Puhuttaessa aliavaruudesta tarkoitamme aina suljettua aliavaruutta.

**Määritelmä 2.1.** Aliavaruus $M \subset X$ on kuvauksen $T : X \to X$ *invariantti aliavaruus*, jos $TM \subset M$.

Triviaalit aliavaruudet $\{0\}$ ja $X$ ovat invariantteja kaikkien lineaarikuvausten suhteen. Kysymys siitä, onko kaikilla ääretönulotteisen ja separoituvan Hilbertin avaruuden jatkuvilla lineaarikuvauksilla epätriviaaleja invariantteja aliavaruuksia tunnetaan *invarianttien aliavaruuksien ongelmana.*

**Määritelmä 2.2.** Olkoon $x \in X$ ja $T \in L(X)$. Tällöin vektori $x$ on kuvauksen $T$ *syklinen vektori*, jos

$$\overline{\mathrm{span}}\{T^n x : n \geq 0\} = X.$$

Tämä joukko on pienin kuvauksen $T$ invariantti aliavaruus, joka sisältää vektorin $x$.

Ekvivalenttia sen kanssa, että lineaarikuvauksella $T$ ei ole epätriviaaleja aliavaruuksia, on se, että jokainen vektori $x \in X \setminus \{0\}$ on syklinen kuvaukselle $T$.

Lineaarikuvauksen invariantit aliavaruudet muodostavat *hilan* (engl. *lattice*).

**Määritelmä 2.3.** Lineaarikuvauksen $T \in L(X)$ *hilaa* merkitään seuraavasti:

$$\mathrm{Lat}(T) = \{M \subset X : M \text{ on kuvauksen } T \text{ invariantti aliavaruus.}\}$$

Seuraavat säännöt pätevät hiloille:

**Lause 2.4.** *Olkoon $M_1, M_2 \in Lat(T)$. Tällöin*

$$M_1 \cap M_2 \in Lat(T) \tag{1}$$

$$M_1 \oplus M_2 \in Lat(T) \tag{2}$$

*jossa $M_1 \oplus M_2 = \overline{span}\{M_1 \cup M_2\}$.*

*Todistus.* Todistamme ensin kohdan 1. Olkoon $x \in M_1 \cap M_2$. Tällöin, koska $M_1$ ja $M_2$ ovat invariantteja, $Tx \in M_1$ ja $Tx \in M_2$ joten $Tx \in M_1 \cap M_2$. Kohta 2: olkoon nyt $x \in M_1 \oplus M_2$. Tällöin

$$x = \overbrace{x_1}^{\in M_1} + \overbrace{x_2}^{\in M_2}$$

joten

$$Tx = T(x_1 + x_2) = \overbrace{Tx_1}^{\in M_1} + \overbrace{Tx_2}^{\in M_2} \in M_1 \oplus M_2.$$

□

## 2.1 Adjungaatit ja invariantit aliavaruudet

Palauttakaamme mieleen, miten lineaarikuvauksen adjungaatti määritellään.

**Määritelmä 2.5.** Olkoon $T \in L(X)$ lineaarikuvaus. Kuvauksen $T$ *adjungaatti* on kuvaus $T^* \in L(X)$, jolle $(Tx, y) = (x, T^*y)$ kaikilla $x, y \in X$.

Adjungaattikuvauksien olemassaolo ja yksikäsitteisyys seuraavat Rieszin esityslauseesta [4, 3.4]. Adjungoinnilla on muun muassa seuraavat ominaisuudet:

$$\begin{aligned}
T^{**} &= T \\
(T^*)^{-1} &= (T^{-1})^* \text{ (jos } T \text{ on kääntyvä, myös } T^* \text{ on kääntyvä.)} \\
(T_1 + T_2)^* &= T_1^* + T_2^* \\
(T_1 T_2)^* &= T_2^* T_1^* \\
(\lambda T)^* &= \bar{\lambda} T^*.
\end{aligned}$$

**Lause 2.6.** *Olkoon $T \in L(X)$. Tällöin $M \in Lat(T)$ jos ja vain jos $M^\perp \in Lat(T^*)$. Tässä merkinnällä $M^\perp$ tarkoitetaan joukon $M$ ortokomplementtia eli $M^\perp = \{y \in X : (x, y) = 0$ kaikilla $x \in M\}$.*

*Todistus.* Olkoon $x \in M$ ja $y \in M^\perp$. Tällöin

$$(Tx, y) = (x, T^*y).$$

Toisin sanoen, jos $M \in \mathrm{Lat}(T)$, niin $(Tx, y) = 0$, joten $(x, T^*y) = 0$ eli $x \perp T^*y$. Koska $x$ oli mielivaltainen, pätee $T^*y \in M^\perp$. Toinen suunta samaan tapaan. □

Joskus sekä aliavaruus että aliavaruuden ortokomplementti ovat lineaarikuvauksen suhteen invariantteja:

**Määritelmä 2.7.** Aliavaruus $M \subset X$ on lineaarikuvauksen $T : X \to X$ *redusoiva aliavaruus*, jos sekä $M$ että $M^\perp$ ovat invariantteja kuvauksen $T$ suhteen. Tällöin voimme myös sanoa, että $M$ *redusoi kuvauksen* $T$.

## 2.2 Projektiokuvaukset ja redusoivat aliavaruudet

**Lemma 2.8.** *Olkoon $M \subset X$ aliavaruus, ja olkoon kuvaus $P : X \to M$ projektio. Tällöin $M \in Lat(T)$ jos ja vain jos $TP = PTP$.*

*Todistus.* Välttämättömyys: oletamme, että $M \in \mathrm{Lat}(T)$. Kaikilla $x \in X$ pätee, että $Px \in M$. Täten myös $TPx \in M$ kaikilla $x \in X$. Lisäksi koska $TM \subset M$, pätee $P(TPx) = TPx$ kaikilla $x \in X$.

Riittävyys: oletamme, että $TP = PTP$. Olkoon nyt $x \in PX = M$ kiinnitetty. Tällöin $Px = x$, joten oletuksemme $TPx = PTPx$ yksinkertaistuu muotoon $Tx = PTx$. Tämä toisaalta tarkoittaa sitä, että $Tx \in PX$ joten $PX = M \in \mathrm{Lat}(T)$.

$\square$

Lineaarikuvauksen $T$ redusoivia aliavaruuksia voi etsiä myös seuraavan lemman avulla.

**Lemma 2.9.** *Olkoon $P \in L(X)$ ortoprojektiokuvaus aliavaruudelle $M \subset X$. Tällöin $M$ on linaarikuvauksen $T : X \to X$ redusoiva aliavaruus jos ja vain jos $PT = TP$. Lisäksi $M$ on lineaarikuvauksen $T$ redusoiva aliavaruus jos ja vain jos $M$ on invariantti kuvauksien $T$ ja $T^*$ suhteen.*

*Todistus.* Välttämättömyys: Oletetaan ensin, että $M$ on kuvauksen $T$ redusoiva aliavaruus.

Tällöin $M$ ja $M^\perp$ ovat invariantteja kuvauksen $T$ suhteen. Kuvaus $I - P$ on ortoprojektiokuvaus $X \to M^\perp$. Lemman 2.8 nojalla

$$\begin{aligned} T(I-P) &= (I-P)T(I-P) \\ \Rightarrow T(I-P) &= T - PT - TP + PTP \\ \Rightarrow T - TP &= T - PT - TP + PTP \\ \Rightarrow PT &= PTP. \end{aligned}$$

Toisaalta, koska $M \in \mathrm{Lat}(T)$, pätee, että $TP = PTP$, joten $PT = TP$.

Riittävyys: oletamme, että $TP = PT$.

Olkoon $x \in M$ kiinnitetty. Haluamme osoittaa, että $Tx \in M$. Oletuksen nojalla saamme $TPx = PTx$, ja koska $Px = x$, pätee $Tx = PTx$. Tämä toisaalta tarkoittaa sitä, että $Tx \in M$ eli $M \in \mathrm{Lat}(T)$.

Toisaalta myös $T(I - P) = (I - P)T$ ja samankaltaisen päättelyn avulla saamme, että jos $x \in M^\perp$ niin $Tx \in M^\perp$. Siispä myös $M^\perp \in \mathrm{Lat}(T)$ eli $M$ on kuvauksen $T$ redusoiva aliavaruus.

Toinen osa lemmasta todistuu huomaamalla ensin, että projektiokuvaus $P$ on oma adjungaattinsa eli $P^* = P$. Tällöin $PT = TP$ jos ja vain jos $PT^* = T^*P$. Toisin sanoen $M$ on kuvauksen $T$ redusoiva aliavaruus jos ja vain jos $M$ on kuvauksen $T^*$ redusoiva aliavaruus. Erityisesti $M$ on invariantti kummankin kuvauksen suhteen. Toisaalta, jos $M$ on invariantti kuvauksien $T$ ja $T^*$ suhteen, pätee

$$PTP = TP \text{ ja } PT^*P = T^*P.$$

Ottamalla jälkimäisestä yhtälöstä adjungaatit, saamme, että

$$\begin{aligned}
(PT^*P)^* &= (T^*P)^* \\
\Rightarrow (PT^*)^*P^* &= P^*T \\
\Rightarrow (TP^*)P^* &= PT \\
\Rightarrow TP &= PT,
\end{aligned}$$

joten todistuksen aiemman osan perusteella $M$ on kuvauksen $T$ redusoiva aliavaruus. $\square$

# 3 Hardy-avaruus $H^2$

Palautamme mieleen jonoavaruuden $\ell^2$ määritelmän. Jonoavaruus $\ell^2$ sisältää kompleksiset lukujonot $(a_k)$, joille pätee, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$$

suppenee. Avaruuden $\ell^2$ normi määritellään tällöin asettamalla

$$\|a\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

kun $a = (a_k)$. Normin kanssa yhteensopiva sisätulo on

$$(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

**Määritelmä 3.1.** *Hardy-avaruus* $H^2$ määritellään seuraavana joukkona:

$$H^2 = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ja } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Toisin sanoen, avaruus $H^2$ sisältää sellaiset analyyttiset funktiot $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, joiden Taylor-kertoimien neliösummat suppenevat. Todistamme tämän lemmassa 3.2. Tutkimme seuraavaksi, minkälaisia funktioita avaruuden $H^2$ alkiot ovat, ja tätä varten varustamme avaruuden $H^2$ luonnollisella normilla ja sisätulolla.

Avaruuden $H^2$ normi määritetään asettamalla $\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$. Tällöin $H^2$ on Hilbertin avaruus, jonka normin kanssa yhteensopiva sisätulo on

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

missä $\hat{f}(n)$ tarkoittaa funktion $f$ $n$. Taylor-kerrointa, $a_n = \hat{f}(n)$ ja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Kuvaus $(a_n) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ on isometrinen isomorfismi avaruuksien $\ell^2$ ja $H^2$ välillä.

Sanomme, että kuvaus on *unitaarinen*, jos se on isometrinen isomorfismi.

**Lemma 3.2.** *Avaruuden $H^2$ kaikki alkiot ovat analyyttisiä funktioita yksikkökiekossa $\mathbb{D}$.*

*Todistus.* Olkoon $f \in H^2$ ja $z_0 \in \mathbb{D}$. Tällöin

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n. \tag{1}$$

Koska jono $(a_n) \in \ell^2$, on olemassa $K \in \mathbb{R}$ siten että $|a_k| \leq K$ kaikilla indekseillä $k$. Voimme kirjoittaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| \leq K \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n \leq K \sum_{n=0}^{\infty} r^n,$$

missä $|z_0| \leq r < 1$, joten sarja suppenee. Sarja yhtälössä (1) suppenee, koska se suppenee itseisesti. Funktio $f$ on siis hyvinmääritelty. Funktio $f$ on myös analyyttinen alueessa $\mathbb{D}$, koska sarjan suppeneminen on tasaista kompakteissa osajoukoissa. Toisin sanoen, $H^2 \subset H(\mathbb{D})$ eli avaruus $H^2$ on osajoukko yksikkökiekon analyyttisten funktioiden joukolle. $\square$

Käytämme seuraavaa "evaluaatiofunktionaalia" apuna myöhemmissä todistuksissa.

**Lemma 3.3.** *Olkoon $z_0 \in \mathbb{D}$. Tällöin kuvaus $f \mapsto f(z_0)$ on jatkuva lineaarinen funktionaali $H^2 \to \mathbb{C}$.*

*Todistus.* Kuvauksen lineaarisuus on selvää. Olkoon nyt $f \in H^2$. Saamme seuraavan arvion:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \right| \\ &\leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| \left( \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Kuvaus on siis rajoitettu, joten se on lineaarikuvauksena jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen normi on enintään $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-|z_0|^2}}$. $\square$

Riezin esityslauseen [2, 4.12] mukaan jokaista Hilbertin avaruuden lineaarista funktionaalia $\phi$ vastaa vektori $y$, jolle pätee

$$\phi(x) = (x, y)$$

kaikilla $x$.

Voimme löytää edellä määritellylle evaluaatifunktionaalille tällaisen vektorin:

**Määritelmä 3.4.** Olkoon $z_0 \in \mathbb{D}$. Määrittelemme pisteen $z_0$ *reprodusoivan ytimen*, funktion $k_{z_0}$, seuraavasti:

$$k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_0}^n z^n = \frac{1}{1 - \overline{z_0} z}.$$

**Lause 3.5.** *Edellä määritelty funktio $k_{z_0}$ on avaruuden $H^2$ alkio ja $\|k_{z_0}\| = (1 - |z_0|^2)^{-1/2}$. Edelleen, jos $z_0 \in \mathbb{D}$ ja $f \in H^2$ niin tällöin $f(z_0) = (f, k_{z_0})$.*

*Todistus.* Ensimmäistä osaa varten meidän tulee tarkistaa ainoastaan Taylor-kertoimien sarjan neliösuppeneminen:

$$\|k_{z_0}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |z_0^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{z_0}|^{2n} = \frac{1}{1 - |z_0|^2},$$

joten $k_{z_0} \in H^2$. Lisäksi tästä seuraa, että $\|k_{z_0}\| = (1 - |z_0|^2)^{-1/2}$.

Merkitsemme nyt $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Käyttäen funktion $k_{z_0}$ sarjaesitystä ja sisätulon määritelmää saamme heti

$$(f, k_{z_0}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = f(z_0),$$

mikä todistaa jälkimmäisen väitteen. □

Funktiojonon suppeneminen avaruuden $H^2$ normin suhteen on eri asia kuin suppeneminen funktioina. Toisin sanoen, suppeneminen avaruudessa $H^2$ ei *a priori* kerro, kuinka funktioiden arvot suppenevat. Osoittautuu kuitenkin, että suppenemisesta avaruudessa $H^2$ seuraa tasainen suppeneminen joukon $\mathbb{D}$ kompakteilla osajoukoilla.

**Lause 3.6.** *Jos $f_n \to f$ avaruudessa $H^2$, niin $f_n \to f$ tasaisesti joukon $\mathbb{D}$ kompakteissa osajoukoissa.*

*Todistus.* Olkoon $z_0 \in \mathbb{D}$. Tällöin

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| = |(f_n - f, k_{z_0})| \leq \|f_n - f\|\|k_{z_0}\|.$$

Olkoon $K \subset \mathbb{D}$ kompakti. Tällöin kuvauksen $z_0 \mapsto \|k_{z_0}\|$ jatkuvuuden nojalla on olemassa luonnollinen luku $M$, jolle $\|k_{z_0}\| \leq M$ kaikille $z_0 \in K$. Siis

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \leq M\|f_n - f\|,$$

mikä todistaa väitteen. □

Avaruuden $H^2$ alkiot ovat funktioita, jotka ovat määritelty avoimessa yksikkökiekossa. Vaikka funktioita ei ole määritelty kiekon reunalla $\mathbb{T}$, niillä saattaa olla raja-arvo reunalla. Tutkimme seuraavaksi, minkälaista rajakäyttäytymistä avaruuden $H^2$ funktioilla voi olla. Osoittautuu hedelmälliseksi tutkia asiaa uuden Hilbertin avaruuden kautta: avaruuden $L^2 = L^2(\mathbb{T})$.

## 3.1 Hilbertin avaruus $L^2$ ja Fourier-sarjaesitys

**Määritelmä 3.7.** Hilbertin avaruus $L^2$ sisältää funktiot $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, jotka ovat neliöintegroituvia ympyrällä $\mathbb{T}$ määritellyn yksiulotteisen normalisoidun Lebesguen mitan suhteen. Avaruuden $L^2$ sisätulo määritellään asettamalla

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})} d\theta,$$

jolloin sisätulon määrittelemä normi on

$$\|f\| = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Yllä $d\theta$ on tavallinen välin $[0, 2\pi]$ Lebesguen mitta.

Kuten on tyypillistä, käsitämme avaruuden $L^2$ alkiot funktioina emmekä funktioiden ekvivalenssiluokkina, jolloin funktiot samastetaan, jos ne ovat samat melkein kaikkialla (m.k.).

Asetamme funktiot $e_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$, jolloin joukko $\{e_n | n \in \mathbb{Z}\}$ muodostaa ortonormaalin kannan avaruudelle $L^2$ [2, s. 89-92]. Tämä kannan avulla kirjoitetaan funktion *Fourier-sarjaesitys.*

Olkoon $f \in L^2$. Tällöin voimme kirjoittaa

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

jossa luvut $a_n \in \mathbb{C}$ ovat funktion $f$ *Fourier-kertoimet*. Erityisesti $a_n = (f, e_n)$. Edellä olevan sarjan suppeneminen tulee ymmärtää $L^2$-normin suhteen.

Edellä oleva kaava määrittää isometrisen isomorfismin eli unitaarisen kuvauksen $\ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2$:

$$(a_n) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Voimme laskea funktion $f$ normin *Parsevalin lauseen* avulla:

**Lause 3.8.** *Olkoon $f \in L^2$. Tällöin*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

*missä termit $a_k$ tulevat funktion $f$ Fourier-sarjaesityksestä.*

*Todistus.* Todistus löytyy lähteestä [2, 4.18]

□

**Määritelmä 3.9.** Joukko

$$\widetilde{H^2} = \{\widetilde{f} \in L^2 | (\widetilde{f}, e_n) = 0 \text{ kun } n < 0\}.$$

on avaruuden $L^2$ aliavaruus.

Tällöin pätee $\widetilde{f} \in \widetilde{H^2}$, jos funktion $\widetilde{f}$ Fourier-sarjaesitys on muotoa

$$\widetilde{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}, \text{ jossa } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Osoittautuu, että avaruuksien $H^2$ ja $\widetilde{H^2}$ välillä on luonnollinen unitaarinen kuvaus: voimme samaistaa funktion $\widetilde{f} \in \widetilde{H^2}$, jolla on Fourier-sarjaesitys $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, analyyttisen funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kanssa.

Funktiot $f$ ja $\widetilde{f}$ liittyvät toisiinsa kiinteästi myös funktioina — tutkikaamme tätä seuraavaksi.

Olkoon $f$ ja $\widetilde{f}$ kuten yllä, olkoon $0 < r < 1$ ja määritelkäämme funktio $f_r$ seuraavasti:

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Tällöin $f_r \in \widetilde{H^2}$.

Edellä avaruuden $L^2$ normi on määritelty integraalina ja tämä normi periytyy myös aliavaruudelle $\widetilde{H^2}$. Seuraava lause antaa tavan laskea normi suoraan funktion $\widetilde{f}$ Fourier-kertoimista.

Nyt voimme vertailla kuinka funktiot $f$ ja $\widetilde{f}$ liittyvät toisiinsa.

**Lause 3.10.** *Olkoon funktiot $f$ ja $f_r$ jälleen määritelty kuten yllä. Tällöin $f_r \to \widetilde{f}$ avaruudessa $\widetilde{H^2}$ kun $r \to 1^-$.*

*Todistus.* Sijoittamalla funktioiden sarjaesityksen ja käyttämällä lausetta 3.8 saamme

$$\|\widetilde{f} - f_r\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_n r^n) e^{in\theta} \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2.$$

Jaamme jälkimmäisen summan kahteen osaan, ja arvioimme osia ylöspäin. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska summa $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ suppenee, on olemassa luonnollinen luku $n_0$ siten että

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

On myös olemassa sellainen luku $s \in (0, 1)$, että kaikille $r \in (s, 1)$ pätee, että

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n|^2 (1 - r^n)^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nyt voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f} - f_r\|^2 &= \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n|^2(1-r^n)^2 + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2(1-r^n)^2 \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2 \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

□

**Korollaari 3.11.** *Olkoon $f \in H^2$. Tällöin on olemassa kasvava jono $\{r_n\}$, jolle $0 < r_n < 1$ kaikilla $n$, $r_n \to 1$ kun $n \to \infty$ ja*

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n e^{i\theta}) = \widetilde{f}(e^{i\theta})$$

*melkein kaikilla $\theta$.*

*Todistus.* Suppeneminen avaruudessa $L^2$ tarkoittaa, että osajono suppenee pistettäin melkein kaikkialla [2, s.68]. Väite seuraa edellisen lauseen todistuksesta. □

*Huomio* 3.12. Itse asiassa aiemmasta korollaarista pätee vahvempi versio:

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = \widetilde{f}(e^{i\theta})$$

melkein kaikilla $\theta$. Sivuutamme todistuksen, sillä tarvitsemme vain heikomman version tuloksesta. Vahvempi tulos on todistettu esimerkiksi lähteessä [2, s. 340].

**Lause 3.13.** *Normi avaruudessa $H^2$ voidaan määritellä myös seuraavasti [2, s. 337]:*

$$\|f\|^2 = \sup_{0<r<1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right).$$

*Todistus.* Väite todistuu havaitsemalla, että integraalin arvo kasvaa, kun $r$ kasvaa. □

## 3.2 Poissonin integraalikaava ja avaruudet $H^\infty$ sekä $L^\infty$

**Määritelmä 3.14.** Olkoon $0 \leq r < 1$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$. *Poissonin ydin* $P_r(\theta)$ määritellään asettamalla

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

**Lause 3.15** (Poissonin integraalikaava)**.** *Olkoon $f \in H^2$. Tällöin yhtälö*

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta})P_r(\theta - t)d\theta$$

*pätee kaikilla $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$.*

*Todistus.* Olkoon $z_0 \in \mathbb{D}$. Koska

$$\widetilde{k_{z_0}}(e^{i\theta}) = \frac{1}{1 - \bar{z}_0 e^{i\theta}},$$

voimme kirjoittaa

$$(*) \qquad f(z_0) = (f, k_{z_0}) = (\widetilde{f}, \widetilde{k_{z_0}}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\widetilde{f}(e^{i\theta})}{1 - z_0 e^{-i\theta}} d\theta.$$

Funktion

$$\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}}$$

Fourier-sarjakehitelmä on

$$1 + z_0 e^{-i\theta} + z_0^2 e^{-2i\theta} + \cdots$$

joten funktion

$$\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} - 1$$

kaikki positiiviset Fourier-kertoimet ovat 0. Siten se on kohtisuorassa funktiota $\widetilde{f}$ kohti.

Tästä seuraa, että

$$\left(\widetilde{f}, \frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} - 1\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta})\overline{\left(\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} - 1\right)} d\theta = 0.$$

Voimme lisätä yllä olevan integraalin yhtälössä (*) esiintyneeseen integraaliin, jolloin saamme

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta}) \left( \frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - \bar{z}_0 e^{i\theta}} - 1 \right) d\theta.$$

Sijoittamalla $z_0 = re^{it}$ voimme muokata murtolausekkeita integraalin sisällä. Saamme

$$\frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - \bar{z}_0 e^{i\theta}} - 1 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} = P_r(\theta - t)$$

kuten halusimmekin.

Siis

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta}) P_r(\theta - t) d\theta.$$

□

Poissonin integraalikaava antaa seuraavan tuloksen käyttöömme:

**Korollaari 3.16.** *Olkoon $f \in H^2$ sellainen, että $|\widetilde{f}(e^{i\theta})| \leq K$ melkein kaikkialla. Tällöin $|f(z)| \leq K$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$.*

*Todistus.* Havaitsemme ensin, että Poissonin ytimelle pätee $P_r(\theta) > 0$ kaikilla $\theta$ ja kaikilla $0 \leq r < 1$:

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

missä $1 - r^2 > 0$ ja $1 - 2r\cos\theta + r^2 \geq (1 - r)^2 > 0$.

Poissonin ytimellä on myös seuraava ominaisuus:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta = 1$$

kaikilla $r \in [0, 1)$ ja kaikilla $t$. Tämän voi huomata soveltamalla Poissonin integraalikaavaa vakiofunktioon 1.

Olkoon nyt $re^{it} \in \mathbb{D}$ kiinnitetty. Saamme

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta}) P_r(\theta - t) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widetilde{f}(e^{i\theta}) P_r(\theta - t)| d\theta \\ &\leq \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta = K, \end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. $\square$

Edellinen korollaari tarkoittaa siis sitä, että jos $\widetilde{f} \in L^\infty$ niin tällöin myös $f$ on rajoitettu analyyttinen funktio.

# 4 Siirto-operaattori

Tässä luvussa tutkimme eteenpäin siirtoa jonoavaruudessa $\ell^2$ ja sen invariantteja aliavaruuksia. Tästä pääsemme luontevasti siirtymään avaruuteen $H^2$, jota koskevia tuloksia edellisessä luvussa esiteltiin. Todistamme myös klassisen Beurlingin lauseen.

**Määritelmä 4.1.** Eteenpäin siirto jonoavaruudessa $\ell^2$ on operaattori $U$, jolle

$$U(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots).$$

**Lause 4.2.** *Eteenpäin siirto on isometria ja sen adjungaatti on taaksepäin siirto $U^*$,*

$$U^*(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

*Todistus.* Olkoon $a = (a_0, a_1, \dots) \in \ell^2$ ja $b = (b_0, b_1, \dots) \in \ell^2$ mielivaltaiset. Isometrisyys:

$$\|U(a_0, a_1, \dots)\|_{\ell^2} = \|(0, a_0, a_1, \dots)\|_{\ell^2} = |0|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \|(a_0, a_1, \dots)\|_{\ell^2}.$$

Nyt

$$(Ua, b) = ((0, a_0, a_1, \dots), (b_0, b_1, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}\overline{b_k}$$

ja

$$(a, U^*b) = ((a_0, a_1, \dots), (b_1, b_2, b_3, \dots)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\overline{b_{k+1}}.$$

Yllä olevat summalausekkeet ovat samat, joten $U^*$ on kuvauksen $U$ adjungaatti. □

Määrittelemme myös jonoavaruuden $\ell^2(\mathbb{Z})$, joka sisältää "kaksisuuntaiset" neliösummautuvat kompleksilukujonot:

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (\dots, a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, \dots) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$$

Kaksisuuntainen (eteenpäin) siirto $W$ avaruudessa $\ell^2(\mathbb{Z})$ määritellään kaavalla

$$W(\dots, a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, \dots) = (\dots, a_{-3}, a_{-2}, \mathbf{a_{-1}}, a_0, a_1, \dots),$$

jossa nollatta koordinaattia merkitään lihavoidulla fontilla.

Siirrolle $W$ pätee vastaava, mutta vahvempi versio, lauseesta 4.2:

**Lause 4.3.** *Operaattorin $W$ adjungaatti, $W^*$, on muotoa*

$$W^*(\dots, a_{-2}, a_{-1}, \mathbf{a_0}, a_1, a_2, \dots) = (\dots, a_{-1}, a_0, \mathbf{a_1}, a_2, a_3, \dots)$$

*ja operaattori $W$ on unitaarinen operaattori eli $WW^* = W^*W = I$.*

**Määritelmä 4.4.** Multiplikaatio-operaattori $M_z : H^2 \to H^2$ määritellään kaavalla

$$(M_z f)(z) = zf(z),$$

kun $f \in H^2$.

Seuraava lause liittää operaattorin $U$ ja määritelmän 4.4 operaattorin $M_z$ toisiinsa. Osoittautuu, että $U$ ja $M_z$ ovat *unitaarisesti ekvivalentteja* eli on olemassa unitaarinen kuvaus $V$ siten että $VU = M_z V$.

**Lause 4.5.** *Avaruuden $H^2$ operaattori $M_z$ on unitaarisesti ekvivalentti avaruuden $\ell^2$ eteenpäin siirron $U$ kanssa.*

*Todistus.* Olkoon $V$ seuraava, luvun 3 alussa mainittu, unitaarinen kuvaus jonoavaruudesta $\ell^2$ avaruuteen $H^2$:

$$V(a_0, a_1, a_2, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Nyt

$$\begin{aligned}
VU(a_0, a_1, a_2, \dots) &= V(0, a_0, a_1, \dots) \\
&= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&= zV(a_0, a_1, \dots) \\
&= M_z V(a_0, a_1, \dots)
\end{aligned}$$

eli $VU = M_z V$. □

Saamme kaksisuuntaiselle siirrolle vastaavanlaisen tuloksen avaruudessa $L^2$, joka esiteltiin määritelmässä 3.7. Määrittelemme ensin operaattorit $M_{e^{i\theta}} \in L(L^2)$ ja $M_{e^{-i\theta}} \in L(L^2)$ seuraavasti:

$$(M_{e^{i\theta}} f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta}) \text{ ja } (M_{e^{-i\theta}} f)(e^{i\theta}) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta})$$

**Lause 4.6.** *Operaattorit $M_{e^{i\theta}}$ ja $M_{e^{-i\theta}}$ ovat unitaarisesti ekvivalentit avaruuden $\ell^2(\mathbb{Z})$ operaattorien $W$ ja $W^*$ kanssa (vastaavasti).*

Huomaamme, että aliavaruus $\widetilde{H^2} \subset L^2$ on invariantti operaattorin $M_{e^{i\theta}}$ suhteen ja että rajoittuma $M_{e^{i\theta}}|\widetilde{H^2}$ vastaa eteenpäin siirtoa avaruudessa $\widetilde{H^2}$. Toisaalta, avaruudessa $\ell^2(\mathbb{Z})$ aliavaruus $\ell^2$ on operaattorin $W$ suhteen invariantti[1], ja rajoittuma $W|\ell^2$ on eteenpäin siirto avaruudessa $\ell^2$.

## 4.1 Invariantit ja redusoivat aliavaruudet

Edellä käytimme käsitettä *invariantti aliavaruus*. Eteenpäin siirrolla ja kaksisuuntaisella siirrolla on useita invariantteja aliavaruuksia: esimerkikinä mainittakoon muotoa $A_n := \{(a_0, a_1, \dots)|a_k = 0, \text{ kun } 0 \leq k \leq n\}$ olevat avaruuden $\ell^2$ aliavaruudet. Entä minkälaisia ovat eteenpäin siirron ja kaksisuuntaisen siirron määritelmässä 2.7 esitellyt *redusoivat aliavaruudet*?

Yksisuuntaisen siirron tapaus on helpompi:

**Lause 4.7.** *Eteenpäin siirron $U$ ainoat redusoivat aliavaruudet ovat $\{0\}$ ja koko avaruus $\ell^2$.*

*Todistus.* Olkoon nyt $\{0\} \neq M \subset \ell^2$ sellainen, että $M$ redusoi kuvauksen $U$. Osoitamme, että $M = \ell^2$. Olkoon $(a_0, a_1, a_2, \dots) \in M \setminus \{0\}$. Voimme olettaa yleisyydestä tinkimättä, että $a_0 \neq 0$. Tämä johtuu siitä, että on olemassa pienin indeksi $n_0$, jolla $a_{n_0} \neq 0$, ja että $U^*M \subset M$ — siis $(U^*)^{n_0} M \subset M$ eli voimme tarvittaessa operoida kuvauksella $U^*$ $n_0$ kertaa, jolloin nollas jonon jäsen on nollasta eroava.

Nyt $UU^*(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$. Siten $(0, a_1, a_2, \dots) \in M$. Tästä seuraa, että

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) - (0, a_1, a_2, \dots) = (a_0, 0, 0, \dots) \in M.$$

[1] Tulkitsemme tässä luonnollisesti, että aliavaruus $\ell^2$ sisältää lukujonot, joiden negatiivisissa kohdissa olevat alkiot ovat nollia.

Koska $M$ on aliavaruus, myös

$$\frac{1}{a_0}(a_0, 0, 0, \dots) = (1, 0, 0, \dots) = e_0 \in M.$$

Koska $U^n e_0 = e_n$, sisältää $M$ kaikki kantavektorit, ja siten $M = \ell^2$. $\square$

Toisaalta kaksisuuntaisella siirrolla $W$ on useita redusoivia aliavaruuksia. Käytämme niiden löytämiseksi lemmaa 2.9, ja tästä syystä haluamme etsiä kaikki kaksisuuntaisen siirron kanssa kommutoivat operaattorit. Osoittautuu, että nämä kuvaukset ovat helppo karakterisoida avaruudessa $L^2$.

**Määritelmä 4.8.** Olkoon $\phi \in L^\infty$. Funktioon $\phi$ liittyvä *multiplikaatio-operaattori* $M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ määritellään kaavalla $M_\phi f = \phi f$ kaikilla $f \in L^2$.

**Lause 4.9.** *Olkoon $\phi \in L^\infty$. Tällöin $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.*

*Todistus.* Olkoon $f \in L^2$ siten että $\|f\| = 1$. Sup-normin määritelmästä seuraa, että $|\phi(e^{i\theta})| \leq \|\phi\|_\infty$ melkein kaikilla $\theta$. Saamme seuraavan arvion:

$$\|M_\phi f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|\phi\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Toisin sanoen $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$.

Saadaksemme yhtäsuuruuden todistamme seuraavaksi, että $\|M_\phi\| \geq \|\phi\|_\infty$. Merkitsemme $\lambda_0 = \|\phi\|_\infty$, ja voimme olettaa, että $\lambda_0 \neq 0$, koska muuten väite pätee triviaalisti. Joukko

$$E_n = \left\{ e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta})| > \lambda_0 - \frac{1}{n} \right\}$$

on mitallinen ja kaikilla luonnollisilla luvuilla $n$ pätee $m(E_n) > 0$, missä $m$ on joukon $\mathbb{T}$ Lebesguen mitta. Olkoon $\chi_n$ jokon $E_n$ karakteristinen funktio.

Nyt saamme seuraavan arvion, kun oletamme, että $n$ on riittävän suuri:

$$\begin{aligned}
\|M_\phi \chi_n\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_n} |\phi(e^{i\theta})|^2 d\theta \\
&\geq \frac{1}{2\pi} \int_{E_n} \left(\lambda_0 - \frac{1}{n}\right)^2 d\theta \\
&= \left(\lambda_0 - \frac{1}{n}\right)^2 m(E_n).
\end{aligned}$$

Havaitsemalla, että $\|\chi_n\|^2 = m(E_n)$, määrittelemme funktiot $f_n = \chi_n/\|\chi_n\|$. Näin $\|f_n\| = 1$ kaikilla luonnollisilla luvuilla $n$, ja voimme käyttää funktioita $f_n$ arvioimaan kuvauksen $M_\phi$ normia ylöspäin. Myös

$$\|M_\phi f_n\| \geq \lambda_0 - \frac{1}{n},$$

kun $n$ on riittävän suuri. Tästä seuraa, että $\|M_\phi\| \geq \lambda_0 - \frac{1}{n}$ kaikilla suurilla $n$, joten $\|M_\phi\| \geq \lambda_0 = \|\phi\|_\infty$.

Olemme siis todistaneet, että $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. $\square$

**Lause 4.10.** *Kaikki kuvauksen $M_{e^{i\theta}} : L^2 \to L^2$ kanssa kommutoivat jatkuvat lineaarikuvaukset avaruudessa $L^2$ muodostavat joukon*

$$\{M_\phi : \phi \in L^\infty\}.$$

*Todistus.* Huomaamme, että $M_\phi M_{e^{i\theta}} = M_{e^{i\theta}} M_\phi$, kun $\phi \in L^\infty$ eli kaikki joukon $\{M_\phi : \phi \in L^\infty\}$ alkiot kommutoivat kuvauksen $M_e^{i\theta}$ kanssa.

Olkoon nyt $L$ sellainen lineaarikuvaus, joka kommutoi kuvauksen $M_{e^{i\theta}}$ kanssa. Olkoon kuvaus $\phi = Le_0$, jossa $e_0 = 1$ on vakiofunktio. Tällöin $\phi \in L^2$. Haluamme osoittaa, että $\phi \in L^\infty$ ja että $L = M_\phi$.

Koska $L$ kommutoi kuvauksen $M_{e^{i\theta}}$ kanssa, voimme kirjoittaa

$$Le^{in\theta} = LM_{e^{i\theta}}^n e_0 = M_{e^{i\theta}}^n Le_0 = e^{in\theta} Le_0 = \phi e^{in\theta},$$

kun $n \geq 0$. Toisaalta kuvauksella $M_{e^{i\theta}}$ on käänteiskuvaus $M_{e^{i\theta}}^{-1} = M_{e^{-i\theta}}$, jolle myös $LM_{e^{i\theta}}^{-1} = M_{e^{i\theta}}^{-1}L$ joten edellinen päättely yleistyy kaikille luvuille $n \in \mathbb{Z}$: $Le^{in\theta} = \phi e^{in\theta}$.

Koska $L$ on lineaarinen, $Lp = \phi p$ kaikille trigonometrisille polynomeille $p \in L^2$. Trigonometriset polynomit ovat tiheässä avaruudessa $L^2$, [2, 4.26] joten jokaista funktiota $f \in L^2$ kohti on olemassa jono trigonometrisia polynomeja $(p_n)$, joille $p_n \to f$ (avaruudessa $L^2$) kun $n \to \infty$. Jatkuvuuden nojalla $Lp_n \to Lf$ eli $\phi p_n \to Lf$ avaruudessa $L^2$.

Koska $p_n \to f$, on olemassa osajono $(p_{n_i})$, jolle $p_{n_i} \to f$ melkein kaikkialla (kompaktissa) joukossa $\mathbb{T}$. Siten $\phi p_{n_i} \to \phi f$ melkein kaikkialla. Toisaalta yllä totesimme, että $\phi p_n \to Lf$ avaruudessa $L^2$, joten $Lf = \phi f$ melkein kaikkialla, joten $L = M_\phi$.

Riittää enää näyttää, että $\phi \in L^\infty$. Olkoon nyt $n \in \mathbb{N}$ ja asetetaan joukot $E_n = \{e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta})| > n\}$. Haluamme osoittaa, että $m(E_n) = 0$ riittävän suurilla $n$, missä $m$ on joukon $\mathbb{T}$ Lebesguen mitta. Merkitsemme joukon $E_n$ karakteristista funktiota merkinnällä $\chi_n$. Nyt

$$\|L\chi_n\|^2 = \|\phi\chi_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{E_n} |\phi(e^{i\theta})|^2 d\theta \geq n^2 m(E_n).$$

Havaitsemalla, että

$$\|\chi_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{E_n} d\theta = m(E_n),$$

ja sijoittamalla tämän ylempään yhtälöön saamme arvion

$$\|L\chi_n\|^2 \geq n^2\|\chi_n\|^2.$$

Nyt, kun $n > \|L\|$, on oltava $\|\chi_n\| = 0$ eli $m(E_n) = 0$.

Tämä tarkoittaa sitä, että $\phi \in L^\infty$. □

**Lause 4.11.** *Kuvauksen $M_{e^{i\theta}} : L^2 \to L^2$ redusoivat aliavaruudet ovat muotoa*

$$M_E = \left\{ f \in L^2 : f(e^{i\theta}) = 0 \text{ melkein kaikilla } e^{i\theta} \in E \right\},$$

*jossa $E \subset \mathbb{T}$ on mitallinen.*

*Todistus.* Olkoon $E \subset \mathbb{T}$ kiinnitetty ja $M_E$ määritelty kuin edellä. Jos $f(e^{i\theta_0}) = 0$, niin $e^{i\theta_0} f(e^{i\theta_0}) = 0$ joten kuvaus $M_{e^{i\theta}}$ pitää joukon $M_E$ invarianttina. Toisaalta myös, jos $f(e^{i\theta_0}) = 0$, niin $e^{-i\theta_0} f(e^{i\theta_0}) = 0$ eli joukko $M_E$ on invariantti myös kuvauksen $M^*_{e^{i\theta}}$ suhteen.

Lemman 2.8 nojalla joukko $M_E$ redusoi kuvauksen $M_{e^{i\theta}}$.

Toinen suunta: olkoon nyt $M$ kuvauksen $M_{e^{i\theta}}$ redusoiva aliavaruus. Olkoon myös $P : L^2 \to M$ ortoprojektiokuvaus. Lemman 2.8 nojalla $PM_{e^{i\theta}} = M_{e^{i\theta}}P$, jolloin lauseen 4.10 mukaan $P = M_\phi$, jollain funktiolla $\phi \in L^\infty$.

Koska $P$ on projektiokuvaus, $P^2 = P$, joten $M_\phi^2 = M_\phi$ joten edelleen $\phi^2 = \phi$ melkein kaikkialla. Tämä tarkoittaa sitä, että funktiolla $\phi$ on vain kaksi sallittua arvoa: $\phi(e^{i\theta}) \in \{0, 1\}$ melkein kaikkialla.

Voimme kirjoittaa funktion $\phi$ muotoon $\phi = \chi_F$, jossa $\chi_F$ on (mitallisen) joukon

$$F = \{e^{i\theta} \in \mathbb{T} : \phi(e^{i\theta}) = 1\}$$

karakteristinen funktio.

Voimme nyt esittää joukon $M$ funktion $\chi_F$ avulla: $M = \{f \in L^2 : f\chi_F = f\}$. Olkoon nyt $E$ joukon $F$ komplementti. Tällöin

$$M = \left\{ f \in L^2 : f(e^{i\theta}) = 0 \text{ melkein kaikilla } e^{i\theta} \in E \right\} = M_E$$

kuten halusimmekin.

□

**Lause 4.12.** *Kuvauksen $M_{e^{i\theta}} : L^2 \to L^2$ invariantit aliavaruudet, jotka eivät kuitenkaan redusoi kuvausta $M_{e^{i\theta}}$, ovat muotoa $M = \phi\widetilde{H^2}$, jossa $\phi \in L^\infty$ toteuttaa yhtälön $|\phi(e^{i\theta})| = 1$ melkein kaikkialla.*

*Todistus.* Olkoon siis $\phi \in L^2$ siten että $|\phi(e^{i\theta})| = 1$ melkein kaikkialla. Kuvaus $M_\phi$ on isometria:

$$\|\phi f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \|f\|^2,$$

kun $f \in L^2$.

Koska $M_\phi$ on isometria, $M_\phi\widetilde{H^2} = \phi\widetilde{H^2}$ on suljettu aliavaruus. Koska $M_{e^{i\theta}}\widetilde{H^2} \subset \widetilde{H^2}$ ja koska lauseen 4.10 nojalla $M_\phi$ ja $M_{e^{i\theta}}$ kommutoivat, $M_{e^{i\theta}}\phi\widetilde{H^2} \subset \phi\widetilde{H^2}$. Toisin sanoen jokainen muotoa $\phi\widetilde{H^2}$ oleva aliavaruus on invariantti kuvauksessa $M_{e^{i\theta}}$.

Toisaalta muotoa $\phi\widetilde{H^2}$ oleva aliavaruus ei voi redusoida kuvausta $M_{e^{i\theta}}$. Nimittäin, $M^*_{e^{i\theta}}\phi = e^{-i\theta}\phi \notin \phi\widetilde{H^2}$ koska $e^{-i\theta} \notin \widetilde{H^2}$.

Tutkikaamme vielä, minkälaisia muotoa $\phi\widetilde{H^2}$, jossa $|\phi(e^{i\theta})| = 1$ m.k. ja $f \in \widetilde{H^2}$ olevat avaruudet ovat. Tällöin

$$\begin{aligned}(\phi e^{i\theta} f, \phi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\phi(e^{i\theta})}\phi(e^{i\theta})e^{i\theta}f(e^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})|^2 e^{i\theta}f(e^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}f(e^{i\theta})d\theta = 0,\end{aligned}$$

koska funktion $e^{i\theta}f$ nollas Fourier-kerroin on nolla. Niinpä $\phi$ on kohtisuorassa joukkoon $e^{i\theta}\phi\widetilde{H^2}$ nähden eli $\phi \perp M_{e^{i\theta}}M$. Jos siis $M = \phi\widetilde{H^2}$, niin täytyy päteä $\phi \in M \ominus M_{e^{i\theta}}M = \{\phi \in M | \phi \perp M_{e^{i\theta}}M\}$.

Tämän lisäksi joukon $M_{e^{i\theta}}M$ tulee olla joukon $M$ aito aliavaruus. Jos nimittäin olisi niin, että $M_{e^{i\theta}}M = M$, pätisi myös, että $M = M_{e^{i\theta}}^{-1}M = M_{e^{i\theta}}^{*}(M)$. Tämä olisi ristiriitaista, sillä tällöin aliavaruus $M$ redusoisi kuvauksen $M_{e^{i\theta}}$.

Toinen suunta: olkoon nyt $M \subset L^2$ aliavaruus, joka on invariantti, mutta ei redusoiva, kuvaukselle $M_{e^{i\theta}}$. Valitsemme funktion $\phi \in M \ominus M_{e^{i\theta}}M$ siten että $\|\phi\| = 1$. Haluamme osoittaa, että $|\phi(e^{i\theta})| = 1$ m.k. ja että $M = \phi\widetilde{H^2}$.

Koska $\phi \perp M_{e^{i\theta}}M$, pätee myös $\phi \perp M_{e^{i\theta}}^{n}\phi$ kaikilla $n \geq 1$:

$$(\phi, e^{i\theta n}\phi) = (\phi, \phi e^{i\theta n}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})\overline{\phi(e^{i\theta})}e^{-in\theta}d\theta = 0$$

eli toisin sanoen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta}d\theta = 0 \text{ kun } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Koska sisätulolle pätee $(a, b) = \overline{(b, a)}$, voimme ottaa konjugaatit:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta}d\theta = 0 \text{ kun } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

joten $|\phi(e^{i\theta})|$ on vakio. Koska $\|\phi\| = 1$, pätee $|\phi(e^{i\theta})| = 1$ m.k. ja $\phi \in L^\infty$.

Enää on jäljellä osoittaa, että $M = \phi\widetilde{H^2}$. Koska $|\phi| = 1$ m.k., kuvaus $M_\phi$ on unitaarinen ja $M_\phi^{-1} = M_{1/\phi}$. Kuvaus $M_\phi$ kuvaa ortonormaalin joukon $\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ortonormaalille joukolle $\{\phi e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Erityisesti $M_\phi$ kuvaa aliavaruuden $\widetilde{H^2}$ ortonormaalin kannan $\{e^{in\theta}\}_{n\geq 0}$ aliavaruuden $\phi\widetilde{H^2}$ ortonormaaliksi kannaksi $\{\phi e^{in\theta}\}_{n\geq 0}$.

Samoin aliavaruuden $(\widetilde{H^2})^\perp$ ortonormaali kanta $\{e^{in\theta}\}_{n<0}$ kuvautuu joukon $(\phi\widetilde{H^2})^\perp$ ortonormaaliksi kannaksi $\{\phi e^{in\theta}\}_{n<0}$.

Koska $\phi \in M$ ja $\phi e^{in\theta} = M_{e^{i\theta}}^{n}\phi$ kaikilla $n \geq 0$, saamme, että $\phi\widetilde{H^2} \subset M$.

Riittää enää osoittaa, että $M \subset \phi\widetilde{H^2}$. Olkoon siis $f \in M$. Haluamme osoittaa, että $f \in \phi\widetilde{H^2}$, minkä toteamiseksi riittää näyttää, että $f$ on kohtisuorassa joukkoon $(\phi\widetilde{H^2})^\perp$ nähden. Kun $n < 0$, saamme

$$
\begin{aligned}
(\phi e^{in\theta}, f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})e^{in\theta}\overline{f(e^{i\theta})}d\theta \\
(*) \qquad &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})\overline{e^{-in\theta}f(e^{i\theta})}d\theta.
\end{aligned}
$$

Toisaalta, kun $n < 0$, $M_{e^{i\theta}}^{-n} f \in M_{e^{i\theta}}M$. Koska $M_{e^{i\theta}}^{-n} f = e^{-in\theta}f$, pätee $e^{-in\theta}f \in M_{e^{i\theta}}M$. Yllä olemme todenneet, että $\phi \perp M_{e^{i\theta}}M$. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$(\phi, e^{-in\theta}f) = 0$$

eli

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})\overline{e^{-in\theta}f(e^{i\theta})}d\theta = 0,$$

mikä tarkoittaa sitä, että lauseke (*) on myös nolla. Siten $f \perp (\phi\widetilde{H^2})^\perp$ eli $f \in \phi\widetilde{H^2}$. □

Nyt olemme osoittaneet, että kaksisuuntaisen siirron invariantteja aliavaruuksia voidaan karakterisoida funktion $\phi$ avulla. Seuraava tulos antaa tietoa siitä, kuinka aliavaruuden valinta määrää funktion $\phi$.

**Lause 4.13.** *Olkoon funktiot $\phi_1$ ja $\phi_2$ sellaiset, että $|\phi_1(e^{i\theta})| = |\phi_2(e^{i\theta})| = 1$ melkein kaikkialla. Tällöin $\phi_1\widetilde{H^2} = \phi_2\widetilde{H^2}$ jos ja vain jos on olemassa vakio $c$, $|c| = 1$, siten että $\phi_1 = c\phi_2$.*

*Todistus.* Riittävyys: Jos $|c| = 1$, pätee $\phi_1\widetilde{H^2} = c\phi_2\widetilde{H^2}$.

Välttämättömyys: Olkoon nyt $\phi_1\widetilde{H^2} = \phi_2\widetilde{H^2}$. On siis olemassa funktiot $f_1, f_2 \in \widetilde{H^2}$ siten että

$$\phi_1 = \phi_2 f_2 \text{ ja } \phi_2 = \phi_1 f_1.$$

Tällöin välttämättä $|f_1| = |f_2| = 1$. Kertomalla yhtälöt funktioiden $\phi_2$ ja $\phi_1$ kompleksikonjugaateilla saamme

$$
\begin{aligned}
\phi_1\overline{\phi_2} = \phi_2 f_2\overline{\phi_2} &\text{ ja } \phi_2\overline{\phi_1} = \phi_1 f_1\overline{\phi_1} \\
\phi_1\overline{\phi_2} = f_2 &\text{ ja } \phi_2\overline{\phi_1} = f_1 \\
\text{eli } f_1 &= \overline{f_2}.
\end{aligned}
$$

Koska $f_1, f_2 \in \widetilde{H^2}$, tarkoittaa se, että $f_1 = \overline{f_2}$, sitä, että funktion $f_1$ kaikkien Fourier-kertoimien täytyy olla 0 lukuunottamatta nollatta Fourier-kerrointa. Toisin sanoen, funktio $f_1$ on jokin vakio $c$ ja $f_2 = \overline{c}$. □

## 4.2 Sisäfunktiot ja Beurlingin lause

**Määritelmä 4.14.** Yksikkökiekossa määritelty rajoitettu analyyttinen funktio $\phi$ on *sisäfunktio*, jos $|\widetilde{\phi}(e^{i\theta})| = 1$ melkein kaikkialla.

**Lause 4.15.** *Olkoon funktio $\phi \in H^2$ sellainen, että $|\widetilde{\phi}(e^{i\theta})| = 1$ melkein kaikkialla. Tällöin $\phi$ on sisäfunktio.*

*Todistus.* Täytyy osoittaa, että $\phi \in H^\infty$. Tämä seuraa suoraan korollaarista 3.16 □

**Lause 4.16** (Beurlingin lause)**.** *Kuvauksen $M_z : H^2 \to H^2$ kaikki invariantit aliavaruudet, lukuunottamatta aliavaruutta $\{0\}$, ovat muotoa $\phi H^2$ missä $\phi$ on sisäfunktio.*

*Todistus.* Avaruuden $L^2$ operaattorin $M_{e^{i\theta}}$ rajoittuma aliavaruuteen $\widetilde{H^2}$ vastaa unitaarisesti avaruudessa $H^2$ kuvausta $M_z$. Jos $M$ on eteenpäin siirron invariantti aliavaruus, se on invariantti myös kaksisuuntaisessa siirrossa. Lauseen 4.12 nojalla on olemassa mitallinen funktio $\phi \in L^\infty$, jolle $|\phi(e^{i\theta})| = 1$ ja $\phi \in M$. Siten $\phi \in M$ sekä $M = \phi\widetilde{H^2}$.

Siirtymällä avaruuteen $H^2$ saamme, että $M = \phi H^2$ missä $\phi$ on sisäfunktio lauseen 4.15 nojalla. □

Emme ole esitelleet vielä yhtäkään sisäfunktiota eksplisiittisesti. Triviaalien monomien $1, z, z^2, \ldots$ lisäksi esimerkiksi Möbius-kuvaukset, jotka kuvaavat yksikkökiekon itselleen, ovat sisäfunktiota. Tällaiset Möbius-kuvaukset voidaan esittää seuraavan kaavan avulla:

$$\phi(z) = \lambda \frac{a - z}{1 - \bar{a}z},$$

missä $|\lambda| = 1$ ja $a \in \mathbb{D}$.

Edellä mainittua tyyppiä olevien Möbius-kuvausten tulot ovat myös sisäfunktioita, kuten ovat myös niiden sopivasti muodostetut äärettömät tulot eli Blaschke-tulot. Osoittautuu myös, että yleinen sisäfunktio voidaan karakterisoida Blaschke-tulon ja niin sanotun singulaarisen sisäfunktion tulona. Singulaarisella sisäfunktiolla ei ole nollakohtia yksikkökiekossa.

Voidaan osoittaa, että kaikki sisäfunktiot $\phi(z)$ voidaan esittää muodossa

$$\phi(z) = cB(z) \exp\left\{ -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \right\},$$

missä $z \in \mathbb{D}$, $B$ on Blaschke-tulo, $|c| = 1$ ja $\mu$ on äärellinen positiivinen Borelin mitta, joka on singulaarinen Lebesguen mitan kanssa. [2, 17.15] Valitsemalla $c = 1$, $B = 1$ sekä $\mu = \delta_1$ löydämme esimerkin sisäfunktiosta, joka ei ole Blaschke-tulo: Saamme funktion

$$\psi(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}.$$

Käytämme tätä funktiota hyödyksemme luvussa 6.

# 5 Fourier-muunnos ja avaruuksien $L^2(0,\infty)$ ja $H^2(\mathbb{D})$ isomorfisuus

Volterra-operaattorilla tarkoitamme operaattoria $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, joka määritellään kaavalla

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

missä $0 < x < 1$. Haluamme määrittää Volterra-operaattorin invariantit aliavaruudet Beurlingin lauseen avulla. Volterra-operaattori on määritelty avaruuden $L^2(0,1)$ lineaarisena operaattorina, mikä johtaa meidät tutkimaan avaruutta $L^2(0,\infty)$. Ilmenee, että avaruuksien $L^2(0,\infty)$ ja $H^2(\mathbb{D})$ välillä on unitaarinen kuvaus, jonka avulla saamme Beurlingin lauseen käyttöömme. Tässä kappaleessa rakennamme tämän unitaarisen kuvauksen $J : L^2(0,\infty) \to H^2(\mathbb{D})$.

Esittelemme ensin Fourier-muunnoksen ja sen käänteismuunnoksen.

## 5.1 Fourier-muunnos ja Plancherelin lause

**Määritelmä 5.1.** Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ *Fourier-muunnos* $\mathcal{F}f = \hat{f}$ määritellään kaavalla

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dt.$$

Edellä funktio $f$ kuuluu avaruuteen $L^1(\mathbb{R})$, mutta tahdomme sallia myös tilanteen $f \in L^2(\mathbb{R})$. Koska joukon $\mathbb{R}$ Lebesguen mitta on ääretön, $L^2(\mathbb{R})$ ei ole osajoukko avaruudessa $L^1(\mathbb{R})$. Siten mielivaltaisen funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ kohdalla ei integraali edellä olevassa määritelmässä välttämättä suppene. Joukko $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ on kuitenkin tiheä avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$, joten määritelmä on laajennettavissa kaikille avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ funktioille. Tämä tulos tunnetaan Plancherelin lauseena. [2, s. 185]

**Lause 5.2** (Plancherelin lause)**.** *Edellä määritelty kuvaus $\mathcal{F}$ on unitaarinen kuvaus $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, ja sen käänteiskuvaus $\mathcal{F}^{-1}$ saadaan kaavasta*

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{itx}dt,$$

*kun $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ja se laajennetaan jatkuvasti kaikille $g \in L^2(\mathbb{R})$.*

*Todistus.* Plancherelin lauseen todistus löytyy lähteestä [2, s. 186]. □

Plancherelin lauseen mukaan on olemassa myös käänteiskuvaus $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Aliavaruuden $\mathcal{F}^{-1}(L^2(0,\infty))$ funktiot voidaan jatkaa analyyttisiksi funktioiksi ylempään puolitasoon $\mathbb{H}$. Paley-Wienerin lauseen [2, s. 372] mukaan nämä funktiot muodostavat ylemmän puolitason Hardy-avaruuden, $H^2(\mathbb{H})$. Se voidaan kuvata unitaarisesti avaruudelle $H^2(\mathbb{D})$. Välttämme kuitenkin avaruuden $H^2(\mathbb{H})$ esittelemisen ja Paley-Wienerin lauseeseen vetoamisen.

**Määritelmä 5.3.** Määrittelemme kuvauksen $J_2 : L^2(0,\infty) \to L^2(\mathbb{R})$ kaavalla

$$J_2 f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{itx} dt.$$

Kuvaus $J_2$ on käänteinen Fourier-muunnos rajoitettuna avaruuteen $L^2(0,\infty)$.

## 5.2 Avaruuksien $L^2(0,\infty)$ ja $H^2(\mathbb{D})$ välinen unitaarinen vastaavuus

**Määritelmä 5.4.** Kuvaus $J_1 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{T})$ määritellään kaavalla

$$J_1 f(\xi) = \frac{2\pi^{1/2}}{1-\xi} f\left(i\frac{1+\xi}{1-\xi}\right),$$

kun $\xi \in \mathbb{T}$. Kaavassa esiintyy Möbius-kuvaus

$$z \to i\frac{1+z}{1-z},$$

joka kuvaa yksikkökiekon bijektiivisesti ja konformisesti ylemmälle puolitasolle $\mathbb{H}$ ja yksikkökiekon reunan $\mathbb{T}$ joukolle $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

**Lause 5.5.** *Kuvaus $J_1$ on lineaarinen isometria.*

*Todistus.* Lineaarisuus on selvää. Osoittakaamme siis isometrisyys. Avaruuden $L^2(\mathbb{T})$ normin mukaan

$$\begin{aligned}\|J_1 f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \int_{\mathbb{T}} |J_1 f|^2 dm \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |J_1 f(e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{4\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\theta}|^2}\left|f\left(i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\theta}|^2}\left|f\left(i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta.\end{aligned}$$

Haluamme käyttää muuttujanvaihtoa

$$x = i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$

Tätä tarkoitusta varten ratkaisemme

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -e^{i\theta}\frac{2}{(1-e^{i\theta})^2} \\ &= \frac{-2e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} \\ &= \frac{-2}{(1-e^{i\theta})(e^{-i\theta}-1)} \\ &= \frac{2}{|1-e^{i\theta}|^2},\end{aligned}$$

jolloin voimme suorittaa muuttujanvaihdon. Edelleen jatkaen

$$\begin{aligned}2\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\theta}|^2}\left|f\left(i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta &= \int_0^{2\pi}\left|f\left(i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)\right|^2 \frac{2}{|1-e^{i\theta}|^2} d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \\ &= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

eli väitteemme on todistettu. □

**Lause 5.6.** *Kuvaus $J = J_1 J_2$ on lineaarinen isometria $J : L^2(0,\infty) \to L^2(\mathbb{T})$.*

*Todistus.* Tämä seuraa lauseista 5.2 ja 5.5. □

Tavoitteenamme on osoittaa, että kuvaus $J$ määrittelee unitaarisen kuvauksen $L^2(0,\infty) \to \widetilde{H}^2$. Edellisen lauseen nojalla tämä toteutuu, kun osoitamme, että kuvauksen $J$ kuvajoukko on $\widetilde{H}^2$. Kun $f \in L^2(0,\infty)$, pätee $J_2 f \in L^2(\mathbb{R})$ ja

$$J_2 f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{itx} dt,$$

jossa integraali on määritelty, kun $f \in L^2(0,\infty) \cap L^1(0,\infty)$, ja integraali laajennetaan jatkuvasti kaikille $f \in L^2(0,\infty)$.

Voimme kuitenkin laajentaa funktion $J_2 f$ ylempään puolitasoon asettamalla

$$J_2 f(w) = J_2 f(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{itx} e^{-ty} dt,$$

missä $w = x + iy \in \mathbb{H}$ on ylemmän puolitason piste.

Tutkikaamme seuraavaksi, minkälaisia funktioita laajennetut funktiot $J_2 f$ ovat. Tätä varten palautamme ensin mieleen sileät *kompaktikantajaiset funktiot.*

Joukko $C_k^\infty$ sisältää $C^\infty$-funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille $\overline{\mathrm{supp}(f)}$ on kompakti. Toisin sanoen, $C_k^\infty$-funktiot häviävät kompaktin joukon ulkopuolella. Joukko $C_k^\infty \cap L^2(0,\infty)$ on avaruuden $L^2(0,\infty)$ tiheä osajoukko.

**Lause 5.7.** *Olkoon $f \in C_k^\infty \cap L^2(0,\infty)$. Tällöin funktio*

$$H(w) = (w+i) J_2 f(w) \in H^\infty(\mathbb{H})$$

*eli edellä mainittu funktio on ylemmän puolitason rajoitettu analyyttinen funktio.*

*Todistus.* Kirjoittamalla kuvauksen $J_2$ auki ja merkitsemällä $w = x + iy$ saamme

$$g(w) = J_2 f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{itw} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{itx} e^{-ty} dt.$$

Integraalin sisällä oleva funktio $w \mapsto f(t) e^{itw}$ on analyyttinen funktio. Siten myös funktio $g$ on analyyttinen, koska kompleksinen derivaatta $g'(w)$ voidaan laskea tekemällä derivointi integraalimerkin alla; tämä on mahdollista, koska integroitava on kompaktikantajainen ja sileä.

Saamme arvion

$$\begin{aligned}|g(w)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty |f(t)||e^{-itx}|e^{-ty}dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty |f(t)|e^{-ty}dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L^1}\end{aligned}$$

joten funktio $g$ on rajoitettu eli $g \in H^\infty(\mathbb{H})$.

Laskemalla saamme

$$|H(w)| = |w+i||g(w)| \leq |w||g(w)| + |g(w)|,$$

joista jälkimmäinen termi tiedetään edellisen perusteella rajoitetuksi.

Riittää siis osoittaa, että $|w||g(w)|$ on rajoitettu ylemmässä puolitasossa. Jälleen kirjoittamalla $w = x+iy$ saamme

$$|w||g(w)| \leq (|x|+|y|)|g(x+iy)|.$$

Koska $f \in C_k^\infty$, myös funktion $f$ derivaatalle pätee $f' \in C_k^\infty$, jolloin edellisen perusteella $J_2(f')$ on rajoitettu. Osittaisintegroimalla saamme

$$\begin{aligned}J_2 f'(x+iy) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{it(x+iy)}dt \\ &= \Big/_{t=-\infty}^{t=\infty} f(t)e^{it(x+iy)} - \int_{-\infty}^{\infty} i(x+iy)f(t)e^{it(x+iy)}dt \\ &= 0 - i(x+iy)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}e^{-ty}dt \\ &= -i(x+iy)g(x+iy),\end{aligned}$$

joten myös termi $|w||g(w)|$ on rajoitettu.

Niinpä $H \in H^\infty(\mathbb{H})$ kuten halusimme. $\square$

Laajentakaamme myös kuvaus $J_1$ kaikille ylemmän puolitason analyyttisille funktioille $f$ asettamalla

$$J_1 f(z) = \frac{2\pi^{1/2}}{1-z} f\left(i\frac{1+z}{1-z}\right),$$

kun $z \in \mathbb{D}$. Tällöin $J_1 f$ on analyyttinen funktio yksikkökiekossa $\mathbb{D}$.

**Seuraus 5.8.** *Laajennettu kuvaus $J = J_1 J_2 : L^2(0,\infty) \to H^2(\mathbb{D})$ on hyvinmääritelty lineaarinen isometria.*

*Todistus.* Joukko $C_k^\infty \cap L^2(0,\infty)$ on tiheä avaruudessa $L^2(0,\infty)$. Edellisestä lauseesta ja edellä laajentamamme kuvauksen $J_1 f$ määritelmästä seuraa, että $J(C_k^\infty \cap L^2(0,\infty)) \subset H^\infty(\mathbb{D})$. Väite seuraa lauseesta 5.6. $\square$

Haluamme vielä osoittaa, että kuvaus $J$ on surjektio.

**Lause 5.9.** *Kuvaus $J : L^2(0,\infty) \to H^2(\mathbb{D})$ on surjektio.*

*Todistus.* Olkoon nyt $f_s(t) = -i\sqrt{2\pi}e^{-it\bar{s}}$ missä $s \in \mathbb{H}$. Tällöin

$$J_2 f_s(w) = F_s(w) = \frac{1}{w - \bar{s}}$$

ja

$$\begin{aligned} J_1 F_s(z) &= \frac{1}{i\frac{1+z}{1-z} - \bar{s}} \cdot \frac{2\pi^{1/2}}{1-z} \\ &= \frac{2\pi^{1/2}}{i(1+z) - \bar{s}(1-z)}. \end{aligned}$$

Ylemmän puolitason piste $s$ on muotoa

$$s = i\frac{1+u}{1-u}$$

jollakin kiekon pisteellä $u \in \mathbb{D}$. Sijoittamalla saamme lausekkeen

$$\begin{aligned} h_u(z) := J_1 F_s(z) &= \frac{2\pi^{1/2}}{i(1+z) + i\frac{1+\bar{u}}{1-\bar{u}}(1-z)} \\ &= -i2\pi^{1/2} \cdot \frac{1}{1 + z + \frac{1+\bar{u}}{1-\bar{u}}(1-z)} \\ &= -i2\pi^{1/2} \cdot \frac{1-\bar{u}}{(1-\bar{u})(1+z) + (1+\bar{u})(1-z)} \\ &= \frac{-i2\pi^{1/2}(1-\bar{u})}{2(1-\bar{u}z)}. \end{aligned}$$

Osoittautuu, että

$$\overline{\text{span}}\{h_u : u \in \mathbb{D}\} = H^2(\mathbb{D}).$$

Tämän huomaamme tarkastelemalla avaruuden $H^2(\mathbb{D})$ sisätuloja $(f, h_u)$.

Osoitamme, että jos $(f, h_u) = 0$ kaikilla $u \in \mathbb{D}$, niin täytyy päteä, että $f = 0$. Toisin sanoen joukon $\overline{\text{span}}\{h_u : u \in \mathbb{D}\}$ ortokomplementti sisältää ainoastaan nolla-alkion.

Cauchyn kaavaa käyttämällä ja merkitsemällä $\xi = e^{i\theta}$, jolloin $\dfrac{d\xi}{d\theta} = ie^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}
f(u) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - u} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - u} e^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1}{1 - ue^{-i\theta}} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{\left(\frac{1}{1 - \bar{u}e^{i\theta}}\right)} d\theta \\
&= \left(f, \frac{1}{1 - \bar{u}z}\right)_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \frac{(f, h_u)}{i\pi^{1/2}(1 - u)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

joten $f = 0$. Siten joukon $\overline{\text{span}}\{h_u : u \in \mathbb{D}\}$ ortokomplementti sisältää ainoastaan nolla-alkion, ja $\overline{\text{span}}\{h_u : u \in \mathbb{D}\} = H^2(\mathbb{D})$.

$\square$

**Korollaari 5.10.** *Kuvaus $J : L^2(0, \infty) \to H^2(\mathbb{D})$ on unitaarinen.*

# 6 Volterra-operaattorin invariantit aliava-ruudet

Volterra-operaattori on operaattori $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, joka on määritelty kaavalla

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

jossa $x \in (0,1)$.

Tahdomme nyt määrittää Volterra-operaattorin invariantit aliavaruudet eli toisin sanoen sen hilan, $\text{Lat}(V)$ (katso jakso 2). Ilmeistä on, että avaruudet muotoa $L^2(a,1)$, jossa $a \in (0,1)$, ovat invariantteja. Tässä $L^2(a,1) = \{f \in L^2(0,1) : f \restriction_{(0,a)} = 0\}$. Hämmästyttävä tulos on, että nämä ovat kuvauksen $V$ ainoat invariantit aliavaruudet.

Tuloksen todistuksessa seuraamme Donald Sarasonin artikkelia "A Remark on the Volterra Operator" [3], mutta myös muita tapoja on olemassa. Mainittakoon esimerkkinä Ramiz Tapdigoglun artikkeli "Invariant subspaces of Volterra integration operator: Axiomatical approach" [5].

Sarason kiinnittää artikkelissaan huomiota operaattorin $V + I$ ja eteenpäin siirron väliseen yhteyteen, jonka esittelemme jaksossa 6.1. Palauttakaamme mieleen eteenpäin siirto $U$ jonoavaruudessa $\ell^2$:

$$U(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Kuvaus $U$ on unitaarisesti ekvivalentti avaruuden $H^2$ operaattorin $M_z$ kanssa — katso määritelmä 4.4. Tämän jälkeen Sarason käyttää unitaarista kuvausta $J : L^2(0,\infty) \to H^2(\mathbb{D})$ ja saa käyttöönsä Beurlingin lauseen 4.16. Rakensimme edellisessä jaksossa kuvauksen $J$.

Sarason todistaa artikkelissaan, että operaattoreilla $(V+I)^{-1}$ ja $V$ on samat invariantit aliavaruudet. Käymme tämän läpi jaksossa 6.2.

Beurlingin lauseen mukaan eteenpäin siirron invariantit aliavaruudet ovat muotoa $\phi H^2$, missä $\phi$ on sisäfunktio. Olkoon nyt avaruuden $H^2$ sisäfunktio $\psi$ valittu seuraavasti:

$$\psi(z) = e^{(z+1)/(z-1)}, z \in \mathbb{D}.$$

Olkoon lisäksi $M$ invariantin aliavaruuden $\psi H^2$ ortokomplementti, $M = (\psi H^2)^\perp$, ja olkoon kuvaus $T$ kuvauksen $M_z$ ortoprojektio joukolle $M$ eli

$T = PM_z$. Tällöin kuvauksen $T$ adjungaatti $T^*$ on kuvauksen $M_z^*$ rajoittuma joukkoon $M$. Tämä seuraa adjungoinnin ominaisuuksista, jotka kävimme läpi määritelmässä 2.5. Tällöin

$$H^2 \xrightarrow{M_z} H^2 \xrightarrow{P} M = (\psi H^2)^\perp.$$

## 6.1 Operaattorit $(T + I)/2$ ja $(V + I)^{-1}$

Tutkikaamme aluksi, kuinka kuvaus $J$ muuntaa jo alussa löytämämme muotoa $L^2(a, 1)$ olevat invariantit aliavaruudet avaruuden $H^2$ aliavaruuksiksi. Miellämme jatkossa kaikki muotoa $L^2(a, b)$, jossa $0 \leq a \leq b \leq \infty$, olevat avaruudet avaruuden $L^2(0, \infty)$ aliavaruuksiksi — erityisesti avaruuden $L^2(0, 1)$.

**Lemma 6.1.** *Olkoon $0 \leq a < b \leq 1$. Tällöin kuvaukselle $J$ pätee:*

- $J(L^2(0, b)) = (\phi_b H^2)^\perp$
- $J(L^2(a, \infty)) = \phi_a H^2$
- $J(L^2(a, b)) = (\phi_a H^2) \cap (\phi_b H^2)^\perp$

*missä*

$$\phi_a(z) = e^{a\frac{z+1}{z-1}}$$

*on sisäfunktio.*

*Todistus.* Tutkikaamme ensin aliavaruuden $L^2(a, \infty)$ kuvaa kuvauksessa $J = J_1 J_2$. Olkoon $f \in L^2(a, \infty)$. Tällöin

$$J_2 f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{itx} f(t) dt,$$

josta käyttämällä muuttujanvaihtoa $u = t - a$ saamme

$$J_2 f(x) = \frac{e^{iax}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{iux} f(u + a) du.$$

Merkitseme $f(u+a) = f_a(u)$, jossa $f_a \in L^2(0, \infty)$. Tämä tarkoittaa toisaalta sitä, että

$$J_2(L^2(a, \infty)) = e^{iax} J_2(L^2(0, \infty))$$

joten
$$J(L^2(a,\infty)) = J_1\left(e^{iax}J_2(L^2(0,\infty))\right).$$
Olkoon nyt $g \in L^2(0,\infty)$ mielivaltainen. Tällöin

$$\begin{aligned}
J_1(e^{iax}J_2 g)(\xi) &= \frac{2\pi^{1/2}}{1-\xi}e^{iai\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)}J_2 g\left(i\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)\\
&= e^{a\frac{\xi+1}{\xi-1}}\frac{2\pi^{1/2}}{1-\xi}J_2 g\left(i\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)\\
&= e^{a\frac{\xi+1}{\xi-1}}Jg(\xi)\\
&= \phi_a Jg(\xi).
\end{aligned}$$

Koska $J(L^2(0,\infty)) = H^2$, olemme osoittaneet, että

$$J(L^2(a,\infty)) = \phi_a H^2,$$

kun $0 \leq a \leq 1$.

Havaitsemme, että avaruudessa $L^2(0,\infty)$ pätee $L^2(a,\infty)^\perp = L^2(0,a)$. Lisäksi kuvaus $J$ on unitaarinen, joten se säilyttää ortogonaalisuuden. Tällöin

$$J(L^2(0,a)) = J(L^2(0,a)^\perp)^\perp = J(L^2(a,\infty))^\perp = (\phi_a H^2)^\perp.$$

Tämän lisäksi, koska $L^2(a,b) = L^2(a,\infty) \cap L^2(0,b)$, väitteen viimeinen kaava seuraa yhdistämällä kaksi edellistä.

$\square$

Tavoitteenamme on todistaa, että seuraava kaavio on kommutatiivinen:

$$\begin{tikzcd}
L^2(0,1) \arrow[r, "(V+I)^{-1}"] \arrow[d, "J"'] & L^2(0,1) \arrow[d, "J"] \\
M & M \arrow[l, "\frac{1}{2}(T+I)"]
\end{tikzcd}$$

Yllä oleva kuvaus $T = PM_z$ määriteltiin kuvauksen $M_z$ ortoprojektiona jakson 6 alussa. Samoin määrittelimme $M = (\psi H^2)^\perp$. Tarvitsemme apuvälineenä seuraavaa konvoluutiokuvausta.

**Määritelmä 6.2.** Olkoon

$$k(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0 \\ e^{-x} & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Kuvaus $K : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ määritellään asettamalla

$$Kf(x) = \int_0^x f(x-t)e^{-t}dt = (f * k)(x).$$

Käytämme kuvausta $K$ hyödyksi seuraavalla tavalla:

**Lause 6.3.** *Kuvaus $V+I$ on kääntyvä. Lisäksi kuvaus $(V+I)^{-1}$ on avaruuden $L^2(0,\infty)$ operaattorin $I-K$ projektio joukolle $L^2(0,1)$.Toisin sanoen,*

$$(V+I)^{-1} = P(I-K),$$

*jossa $P : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ on ortoprojektio aliavaruudelle $L^2(0,1)$ eli kun $g \in L^2(0,\infty)$*

$$Pg(x) = \begin{cases} g(x), & \textit{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \textit{kun } x > 1 \end{cases}$$

*Todistus.* Tulee osoittaa, että $P(I-K)(V+I) = I$ ja $(V+I)P(I-K) = I$, jolloin $V+I$ on kääntyvä. Todistamme ensimmäisen. Huomaamalla, että jos väite pätisi, saisimme, että

$$I = P(I-K)(V+I)$$

Edelleen laskemalla saamme

$$\begin{aligned}(I-K)(V+I) &= V + I - KV - K \\ &= I + V - K - KV,\end{aligned}$$

joten riittää osoittaa, että $V - K - KV = 0$ eli $KV = V - K$.

Olkoon $f \in L^2(0,1)$. Laskemalla, kun $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned}
KVf(x) &= \int_0^x Vf(x-t)e^{-t}dt \\
&= \int_0^x \left( \int_0^{x-t} f(s)ds \right) e^{-t}dt \\
&= -\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt - \Big/_{t=0}^{t=x} \left( \int_0^{x-t} f(s)ds \right) e^{-t} \quad \text{(Osittaisintegrointi.)} \\
&= \underbrace{-\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt}_{-Kf} + \underbrace{\int_0^x f(s)ds}_{Vf}
\end{aligned}$$

eli $KV = V - K$. Tulo toisinpäin todistetaan vastaavasti, ja väite on todistettu.

□

**Lause 6.4.** *Kuvaus $J$ muuntaa kuvauksen $(V+I)^{-1}$ unitaarisesti ekvivalentiksi kuvaukseksi $\frac{1}{2}(T+I)$. Toisin sanoen kuvaukselle $V+I : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ pätee $(V+I)^{-1} = J^{-1} \circ \frac{1}{2}(T+I) \circ J$.*

*Todistus.* Huomaamme, että $J$ kuvaa aliavaruuden $L^2(0,1)$ aliavaruudelle $M$, jonka esittelimme luvun alussa. Tämä seuraa lemmasta 6.1 valitsemalla $a = 1$.

Tutkikaamme, mikä on operaattorin $K \in L(L^2(0,\infty))$ kuva muunnoksessa $J$ eli mitä on $JKJ^{-1}$.

Olkoon $f \in L^2(0,\infty)$. Tällöin

$$J_2Kf = J_2(f * k) = J_2f \cdot J_2k \cdot \sqrt{2\pi},$$

koska Fourier-muunnos kahden funktion konvoluutiosta on funktioiden Fourier-muunnoksien tulo. Toisaalta, voimme kirjoittaa funktion $f$ muodossa $J_2^{-1}g$ jollain $g \in J_2(L^2(0,\infty))$. Siten pätee, että

$$J_2KJ_2^{-1}g = g \cdot J_2k \cdot \sqrt{2\pi}.$$

Edelleen

$$
\begin{aligned}
J_2 k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t} e^{itx} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{t(-1+ix)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big/_{t=0}^{t=\infty} \frac{1}{-1+ix} e^{t(-1+ix)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-1+ix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-ix},
\end{aligned}
$$

joten

$$J_2 K J_2^{-1} : g(x) \mapsto \frac{g(x)}{1-ix}.$$

Soveltamalla operaattoria $J_1$ funktioon

$$\frac{g(x)}{1-ix}$$

saamme

$$J_1 \left( \frac{g(x)}{1-ix} \right)(\xi) = \frac{2\pi^{1/2}}{1-\xi} g\left( i \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \cdot \frac{1}{2}(1-\xi),$$

koska nimittäjälle pätee

$$1 - i \left( i \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) = 1 + \frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{2}{1-\xi}.$$

Toisin sanoen

$$J_1 \left( \frac{g(x)}{1-ix} \right)(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \cdot J_1 g(\xi).$$

Siten kuvaus

$$J_1 J_2 K J_2^{-1} J_1^{-1} : H^2 \to H^2$$

on muotoa

$$f \mapsto \frac{1}{2}(1-z) f(z) = \frac{1}{2}(1-U) f,$$

jossa $Uf(z) = zf(z)$ eli $U = M_z$.

Edelleen saamme

$$\begin{aligned} J(I-K) &= JI - JK \\ &= I_{H^2}J - \frac{I_{H^2}-U}{2}J \\ &= \frac{U+I}{2}J, \end{aligned}$$

joten

$$J(V+I)^{-1} = \frac{T+I}{2}J$$

lauseen 6.4 nojalla.

□

Olemme nyt löytäneet yhteyden kuvauksien $(V+I)^{-1}$ ja $(T+I)/2$ välille. Tahdomme käyttää tätä yhteyttä hyödyksi operaattorin $V$ invarianttien aliavaruuksien määrittämisessä. Seuraava lause auttaa tässä tehtävässä.

## 6.2 Operaattorit $V$ ja $(V+I)^{-1}$

**Lause 6.5.** *Operaattoreilla $V$ ja $(V+I)^{-1}$ on samat invariantit aliavaruudet.*

*Todistus.* Osoitamme, että kaavat

$$\begin{aligned} (V+I)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^n \\ V &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[(V+I)^{-1}-I]^n \end{aligned}$$

pätevät. Tulemme huomaamaan, että kyseessä ovat operaattorien $V$ ja $(V+I)^{-1}$ Neumann-sarjaesitykset. Erityisesti yllä olevat sarjat suppenevat operaattorinormin määrittelemässä topologiassa. Tällöin operaattoreilla täytyy olla samat invariantit aliavaruudet, koska kumpikin on approksimoitavissa toisesta muodostetulla polynomilausekkeella.

Merkitsemme

$$T := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^n.$$

Todistamme ensin, että $T$ on hyvinmääritelty lineaarinen operaattori $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$. Olkoon $f \in L^2(0,1)$. Tällöin saamme arvion

$$\begin{aligned}
|Vf(x)| &\leq \int_0^x |f(t)|dt \\
&= \int_0^1 \chi_{[0,x]}(t)|f(t)|dt \\
&\leq \left(\int_0^1 \chi^2_{[0,x]}(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{x}\|f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Niinpä, kun $\|f\|_{L^2} \leq 1$, pätee

$$|Vf(x)| \leq \sqrt{x}$$

kun $x \in [0,1]$. Edelleen laskemalla saamme, että

$$\|Vf\|^2_{L^2} \leq \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

joten $\|V\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Käyttämällä hyödyksemme arviota $\|V^n\| \leq \|V\|^n$ saamme viimein

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(-1)^n V^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < \infty,$$

joten $T$ on hyvinmääritelty.

Haluamme osoittaa vielä, että

$$(V+I)T = I = T(V+I)$$

pätee. Tämän näemme kaksiosaisella, mutta suoralla, laskulla:

$$\begin{aligned}
(V+I)T &= (V+I)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^n \\
&= V\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^n + I\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^n \\
&= V - V^2 + V^3 + \cdots + I - V + V^2 - V^3 + \cdots \\
&= I
\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
T(V+I) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^n\right) V + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^n\right) I \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V^n \\
&= I.
\end{aligned}
$$

Olemme nyt osoittaneet, että ensimmäinen kaavoista pätee.

Seuraavaksi todistamme jälkimmäisen alussa mainituista kaavoista eli

$$
V = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[(V+I)^{-1} - I]^n.
$$

Kirjoitamme

$$
\begin{aligned}
V &= (I-(V+I)^{-1})(V+I) \\
&= (I-(V+I)^{-1})((V+I)^{-1})^{-1} \\
&= (I-(V+I)^{-1})(I - I + (V+I)^{-1})^{-1} \\
&= (I-(V+I)^{-1})(I-(I-(V+I)^{-1}))^{-1} \\
&= (I-(V+I)^{-1})\sum_{n=0}^{\infty}(I-(V+I)^{-1})^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(I-(V+I)^{-1})^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n((V+I)^{-1}-I)^n
\end{aligned}
$$

missä kolmanneksi viimeisellä rivillä on käytetty Neumann-sarjaesitystä operaattoriin $(I-(I-(V+I)^{-1}))^{-1}$. Jotta näin voisi tehdä, täytyy osoittaa, että $\|I-(V+I)^{-1}\| < 1$. Tehkäämme tämä seuraavaksi.

Saamme

$$
\begin{aligned}
I-(V+I)^{-1} &= (V+I)^{-1}\left((V+I)-I\right) \\
&= (V+I)^{-1}V \\
&= V(V+I)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Tiedämme, että $\|V\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Lauseen 6.4 nojalla tiedämme, että kuvaus $(V + I)^{-1}$ on unitaarisesti ekvivalentti avaruuden $H^2$ kuvauksen $\frac{1}{2}(T+I)$ kanssa. Siispä

$$\begin{aligned}\|(V+I)^{-1}\| &= \|\frac{1}{2}(T+I)\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|T\|+1) \\ &= \frac{1}{2}\|PU\| + \frac{1}{2} \leq 1,\end{aligned}$$

jossa $U$ oli eteenpäin siirto.

Edellisten arvioiden perusteella pätee

$$\|I-(V+I)^{-1}\| \leq \|V\|\|(V+I)^{-1}\| < 1,$$

joten Neumann-sarjaestyksen käyttäminen on perusteltua. Operaattoreilla $V$ ja $(V+I)^{-1}$ on siis samat invariantit aliavaruudet, koska kumpikin operaattori voidaan esittää sarjakehitelmänä toisesta.

□

Tarvitsemme vielä seuraavan tunnetun tuloksen käyttöömme.

**Lause 6.6.** *Olkoon $u$ on ei-negatiivinen harmoninen funktio yksikkökiekossa $\mathbb{D}$. Tällöin on olemassa positiivinen mitta $\mu$ reunalla $\partial\mathbb{D}$ siten että*

$$u(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} P_z d\mu = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} d\mu(\xi).$$

*Todistus.* Todistus lyötyy lähteestä [2, s. 247]. □

**Lemma 6.7.** *Sisäfunktio $\phi$ jakaa sisäfunktion $\psi$ jos ja vain jos $\phi = \phi_a$, jossa $0 \leq a \leq 1$.*

*Todistus.* Määrittelimme sisäfunktion $\psi$ asettamalla

$$\psi(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}} = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Lisäksi määrittelimme funktiot $\phi_a$ kaavalla

$$\phi_a = e^{a\frac{z+1}{z-1}}.$$

Sisäfunktio $\phi$ jakaa sisäfunktion $\psi$, jos $\psi = \phi\eta$ jollain sisäfunktiolla $\eta$. Toisaalta, jos funktio $\phi$ jakaa funktion $\psi$, täytyy funktion $\psi/\phi$ olla hyvinmääritelty sisäfunktio. Toisin sanoen, funktiolla $\phi$ ei voi olla nollakohtia kiekossa $\mathbb{D}$. Voimme siis määritellä analyyttisen funktion $h = \log \phi$.

Nyt

$$\frac{\psi}{\phi} = \exp\left(\frac{z+1}{z-1} - h\right) = \exp\left(-h - \frac{1+z}{1-z}\right).$$

Funktio $\phi$ on sisäfunktio eli $|\phi| \leq 1$ joten $\operatorname{Re} h \leq 0$. Samoin funktio $\frac{\psi}{\phi}$ on sisäfunktio, joten $|\frac{\psi}{\phi}| \leq 1$. Toisin sanoen

$$\operatorname{Re}\left(-h - \frac{1+z}{1-z}\right) \leq 0$$

eli

$$-\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} - \operatorname{Re} h \leq 0$$

ja

$$\operatorname{Re} h(z) \geq -\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}.$$

Funktio $h$ on ei-positiivinen harmoninen funktio, joten voimme lauseen 6.6 nojalla kirjoittaa

$$\operatorname{Re} h(z) = -\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} d\mu(\xi)$$

jollain mitalla $\mu \geq 0$. Toisaalta funktion $\psi$ määritelmästä seuraa, että

$$\psi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \exp\left(-\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\xi+z}{\xi-z} d\delta_1(\xi)\right),$$

jossa mitta $\delta_1(\xi) = 1$, kun $\xi = 1$ ja $\delta_1(\xi) = 0$ muulloin. Nyt

$$0 \leq \operatorname{Re} h(z) + \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} d(\delta_1 - \mu)(\xi)$$

joten $\delta_1 - \mu \geq 0$. Siis $0 \leq \mu \leq \delta_1$ joten ainoa mahdollisuus mitalle $\mu$ on se, että $\mu$ on muotoa $\mu = a\delta_1$, $0 \leq a \leq 1$, joten $\phi = \phi_a$.

Toisin sanoen sisäfunktion $\psi$ jakavat sisäfunktiot ovat täsmälleen muotoa

$$\phi_a(z) = e^{a\frac{z+1}{z-1}}, \text{ missä } 0 \leq a \leq 1$$

olevat funktiot.

$\square$

Nyt voimme todistaa päätuloksemme ja määrittää Volterra-operaattorin kaikki invariantit aliavaruudet.

**Lause 6.8.** *Volterra-operaattorin* $V$ *invariantit aliavaruudet ovat muotoa* $L^2(a,1)$*, missä* $0 \leq a \leq 1$.

*Todistus.* Lauseen 6.4 nojalla kuvauksen $(V+I)^{-1}$ invariantit aliavaruudet kuvautuvat kuvauksessa $J$ kuvauksen $T$ invarianteille aliavaruuksille.

Palauttakaamme mieleen kuvauksen $T$ määritelmä. Tutkiessamme kuvauksen $T$ invariantteja aliavaruuksia on mielekästä tulkita, että

$$T = PM_z|M : M \to M,$$

missä $M = (\psi H^2)^\perp$ ja $P$ on ortoprojektio joukolle $M$.

Todistamme ensin, että suljettu aliavaruus $E \subset M$ on kuvauksen $T$ invariantti aliavaruus jos ja vain jos $E = M \cap \phi H^2$, jossa $\phi$ on sisäfunktio, joka jakaa sisäfunktion $\psi$. Havaitsemme, että jos $\phi$ jakaa sisäfunktion $\psi$, niin $\psi H^2 \subset \phi H^2$ ja $(\phi H^2)^\perp \subset (\psi H^2)^\perp = M$.

Olkoon nyt $E = M \cap \phi H^2$, jossa $\phi$ jakaa sisäfunktion $\psi$. Osoitamme, että $T(E) \subset E$. Olkoon $f \in E$. Tällöin $Tf \in M$, joten on osoitettava, että $Tf \in \phi H^2$. Tässä $Tf = PM_z f$ ja Beurlingin lauseen nojalla $M_z f \in \phi H^2$, koska $f \in \phi H^2$.

Saamme

$$Tf = PM_z f = \overbrace{M_z f}^{\in \phi H^2} - \underbrace{\overbrace{(M_z f - PM_z f)}^{(I-P)M_z f}}_{\in M^\perp = \psi H^2 \subset \phi H^2},$$

joten $Tf \in \phi H^2$. Toisin sanoen $Tf \in M \cap \phi H^2 = E$.

Toinen suunta: olkoon nyt $E \subset M$ invariantti kuvauksen $T$ suhteen, toisin sanoen $T(E) = PM_z(E) \subset E$. Tällöin

$$M_z(E) \subset E \oplus \psi H^2$$

ja erityisesti

$$M_z(E \oplus \psi H^2) \subset E \oplus \psi H^2,$$

koska $M_z(\psi H^2) \subset \psi H^2$. Beurlingin lauseesta seuraa, että

$$E \oplus \psi H^2 = \phi H^2$$

jollain sisäfunktiolla $\phi$. Koska $\psi \in E \oplus \psi H^2 = \phi H^2$, täytyy päteä $\psi = \phi h$ jollain $h \in H^2$, joten $\phi$ jakaa funktion $\psi$.

Koska $M = (\psi H^2)^\perp$, pätee $M \cap (E \oplus \psi H^2) = E$, joten $E = M \cap \phi H^2$, kuten halusimme.

Lemman 6.7 nojalla sisäfunktiot $\phi$, jotka jakavat funktion $\psi$, ovat muotoa $\phi_a$, kun $0 \leq a \leq 1$. Toisaalta lemman 6.1 nojalla

$$J(L^2(a, \infty)) = \phi_a H^2,$$

kun $0 \leq a \leq 1$. Toisin sanoen kuvauksen $V$ kaikki invariantit aliavaruudet ovat muotoa $L^2(a, 1)$, kun $0 \leq a \leq 1$, kuten halusimmekin.

$\square$

# Viitteet


[1] Ruben A. Martinez-Avendano, Peter Rosenthal. *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space,* Springer Science+Business Media, 2007

[2] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[3] Sarason, Donald. *A remark on the Volterra operator,* Journal of Mathematical Analysis and Applications 12.2 (1965): 244-246.

[4] Conway, John B. *A course in functional analysis*, Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Tapdigoglu, Ramiz. *Invariant subspaces of Volterra integration operator: Axiomatical approach.* Bulletin des Sciences Mathématiques 136.5 (2012): 574-578.

[6] Tylli Hans-Olav, Kari Astala, ja Petteri Piiroinen. *Funktionaalianalyysin peruskurssi, Luentomuistiinpanot*, 2008.

[7] Jussi Väisälä. *Topologia 1*, Limes, 2007.

[8] Jussi Väisälä. *Topologia 2*, Limes, 2005.